مراجعة حساب التكامل " الدوال الأصلية"

* إذا كانت الدالة د معرفة على الفترة ف ⊂ ح ، فإن كل دالة ل تحقق العلاقة : لَ(س) = د(س) ∀ ∋ ف
تسمى دالة أصلية أو تكامل أو (معكوس المشتقة) للدالة د على ف .

∫ د(س)ءس = ل(س) + ث (ث ثابت) أو لَ (س) = د(س) ∵ (ل دالة أصلية للدالة د)

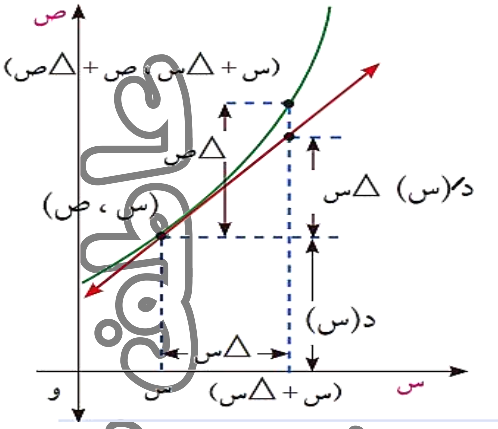
* إذا كانت ل (س) ، ل (س) دالتين أصليتين للدالة د فإن : ل (س)− ل (س) = ث (ثابت)

تمارين على الدوال الأصلية

١	الدالة ل(س) = س^{٤} + ٥ هي دالة أصلية للدالة : Ⓐ د(س) = ـ١ـ س^{٥} + ٥س + ث Ⓑ د(س) = ٤س^{٣} Ⓒ د(س) = ٤س^{٣}+ث Ⓓ د(س) = ل(س) +ث
٢	إذا كانت ل(س)= [. - ٣ ، د(س) = ١٥ - فإن العلاقة بين الدالتين ل ، د هي : Ⓐ د دالة أصلية للدلة ل Ⓑ ل دالة أصلية للدالة د Ⓒ دَ(س) = ل(س) Ⓓ لَ (س) = د(س)
٣	إذا كانت ل(س) = جا س . دالة أصلية للدالة د(س) فإن : Ⓐ دَ(س) = ل(س) Ⓑ د(س) = ل(س) Ⓒ د(س) = ٢ جاس Ⓓ د(س) = جا س
٤	الدالة ي(س) = جتا^{٣}٢س جا٢س دالتها الأصلية هي: Ⓐ −٣جا^{٢}٢س جتا٢س Ⓑ ـ١ـ جتا^{٤}٢س جا٢س Ⓒ − ـ١ـ جتا^{٤}٢س +٣ Ⓓ يَ(س)
٥	الدالة هـ (س) = √س^{٢}+١ إحدى الدوال الأصلية للدالة: Ⓐ س^{٢}+١ Ⓑ ٢ س/+ Ⓒ س/+ Ⓓ − س/+
٦	الدالة ل(س) = (جا^{٢}س + جتا^{٢}س)^{٥} هي دالة أصلية للدالة د(س) تساوي : Ⓐ صفر Ⓑ ٥(جا^{٢}س + جتا^{٢}س)^{٤} Ⓒ ١ Ⓓ ٥ (جتا^{٢}س − جا^{٢}س)^{٤}
٧	إذا كانت ل (س) ،ل (س) دالتين أصليتين للدالة د(س) = ٣س+٢ ،وكانت هـ(س) = ل (س)− ل (س)فإن هـَ(س) = .. Ⓐ صفر Ⓑ ٢ Ⓒ ٣ Ⓓ ٥
٨	إذا كانت الدالة د(س) = جا٢س ، فإن الدالة الأصلية لها هي ل(س) تساوي : Ⓐ − جتا٢س Ⓑ جتا^{٢}س Ⓒ جا س^{٢} Ⓓ جا^{٢}س
٩	أثبت أن الدالة ل(س) = قا^{٢}٣س +ث هي دالة أصلية للدالة د(س) = ٦جا٣س (جتا٣س)$^{-٣}$
١٠	أثبت أن الدالة ل(س) = جتاس هي دالة أصلية للدالة د(س) = جا^{٣}س (جتا^{٢}س− ١)$^{-١}$

طرق التكامل

التفاضلى



نفرض أن الدالة ص = د (س) قابلة للإشتقاق عند النقطة س

و أن النقطة س + Δ س تنتمى لمجال هذه الدالة

فإذا تغيرت س من س إلى س + Δ س

فإن ص تتغير من ص إلى ص + Δ ص

حيث : Δ ص = د (س + Δ س) − د (س)

و من تعريف المشتقة نعلم أن : ⟸ $\frac{ءص}{ءس}$ = دَ (س) = صَ = $\lim\limits_{Δس \to ٠} \frac{Δص}{Δس}$

⟸ $\frac{Δص}{Δس}$ ≃ دَ (س) عندما Δس ≃ ٠ ، Δس ≠ ٠ و منها Δص ≃ دَ (س) Δس

مما سبق يمكن تعريف التفاضلى :

لتكن د دالة قابلة للاشتقاق على فترة مفتوحة تحوى س ، Δ س يرمز للتغير فى س حيث Δس ≠ ٠

فإن ١ - تفاضلى ص ويرمز له بالرمز (ءص) = دَ (س) ءس

٢ - تفاضلى س ويرمز بالرمز (ءس) = Δ س وعلى ذلك فإن:

القاعدة: $\boxed{ءص = د^{/}(س)\ ءس}$ ⟸ تفاضلي ص = مشتقة د (س) × تفاضلي س

ء ص = دَ (س) ءس وهو دالة فى متغيرين س ، ءس

مثال : إذا كانت ص = س ^٣^ فإن: ء ص = ٣ س ءس

مثال ١ صـ ٩٧ : أوجد تفاضلى كل مما يأتى:

ⓐ ص = $\frac{س}{س - ١}$ ⓑ ع = $\frac{٤}{٣}$ π نق ^٣^

ⓒ ص = ع . ل حيث كل من ع ، ل دالة فى س

الحل

ء ص = دَ (س) ءس دَ (س) = ١ + (س − ١) ^-١^ ء ص = [١ + (س − ١) ^-١^] ءس

ء ح = دَ (س) ء نق دَ (ح) = ٤ π نق ^٢^ ء ح = ٤ π نق ^٢^ ء نق

ء ص = دَ (س) ءس دَ (س) = (ع × لَ ءس + ل × عَ ءس = ع ء ل + ل ء ع

حاول أن تحل ١ صـ ٩٨ أوجد تفاضلى كل مما يأتى:

(أ) $ص = (٢س + ٥)^{٤}$ (ب) $ص = هـ^{٢س - ٣}$ (جـ) $ص = \frac{ع}{ل}$ حيث ع، ل دوال في المتغير س

(أ) $ءص = دَ(س)\, ءس \Leftarrow دَ(س) = ٨(٢س + ٥)^{٣}$ $ءص = ٨(٢س + ٥)^{٣} \times ءس$

(ب) $ءص = دَ(س)\, ءس \Leftarrow دَ(س) = ٢هـ^{٢س - ٣}$ $ءص = ٢هـ^{٢س - ٣} \times ءس$

(جـ) $ءص = دَ(س)\, ءس \Leftarrow دَ(س) = \frac{ل عَ - ع لَ}{ل^{٢}}\, ءس$ $ءص = \frac{ل عَ - ع لَ}{ل^{٢}}\, ءس$

تفكير ناقد : اذا كان $س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥$ أوجد ءص بدلالة س ، ص ، ءس

الحل بالاشتقاق بالنسبة ل س $\Leftarrow ٢س + ٢ص \frac{ءص}{ءس} = صفر$

$\Leftarrow$ بالضرب $\times$ ءس $٢س\, ءس + ٢ص\, ءص = ٠ \Leftarrow ءص = \frac{-٢س\, ءس}{٢ص} = \frac{-س\, ءس}{ص}$

بعض قواعد التكامل

١	$\int دَ(س)\, ءس = د(س) + ث$	١	يمكن توزيع التكامل على الجمع والطرح
٢	$\int ءس = س + ث$	٢	لا يمكن توزيع التكامل على الضرب والقسمة
٣	$\int س^{ن}\, ءس = \frac{١}{ن+١} س^{ن+١} + ث$ ، $ن \neq -١$	٣	$\sqrt[ن]{س^{م}} = (س)^{\frac{م}{ن}}$
٤	$\int (أس+ب)^{ن}\, ءس = \frac{١}{أ(ن+١)} (أس+ب)^{ن+١}$ ، $ن \neq -١$	٤	$١ + \frac{أ}{ب} = \frac{ب + أ}{ب}$
٥	$\int [د(س)]^{ن}\, دَ(س)\, ءس = \frac{(د(س))^{ن+١}}{ن+١} + ث$	٥	الدالة قابلة للتكامل على فترة إذا كانت معرفة على هذه الفترة

أمثلة :

(١) $\int (س^{٤} + ٤س - ٥)\, ءس = \frac{س^{٥}}{٥} + \frac{٤س^{٢}}{٢} - ٥س + ث = \frac{١}{٥} س^{٥} + ٢س^{٢} - ٥س + ث$

(٢) $\int (\sqrt{س} + \frac{١}{س^{٣}})\, ءس = \int (س^{\frac{١}{٢}} + س^{-٣})\, ءس$

$= \frac{س^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + \frac{س^{-٢}}{-٢} + ث = \frac{٢\sqrt{س^{٣}}}{٣} - \frac{١}{٢س^{٢}} + ث$

(٣) $\int (س-٥)(س+١)\, ءس = \int (س^{٢} - ٤س - ٥)\, ءس = \frac{١}{} س^{٣} - ٢س^{٢} - ٥س + ث$

(٤) $\int \frac{س^{٣} - ٤س^{٢} - ٥س}{س}\, ءس = \int (س^{٢} - ٤س - ٥)\, ءس$

$= \frac{١}{} س^{٣} - ٢س^{٢} - ٥س + ث$

(٥) $\int \frac{س^{٣} - ١}{س - ١}\, ءس = \int \frac{(س - ١)(س^{٢} + س + ١)}{س - ١}\, ءس$

$= \int (س^{٢} + س + ١)\, ءس = \frac{١}{} س^{٣} + \frac{١}{} س^{٢} + س + ث$

نظرية :

إذا كان : أ ، ب ثابتين ، $ن \neq -١$ فإن : $\int (أس+ب)^{ن}\, ءس = \frac{١}{} \times \frac{١}{} (أس+ب)^{ن+١}$ ، $ن \neq -١$

البرهان :

ينتج مباشرة بإيجاد المشتقة الأولى للطرف الأيسر

أمثلة :

(١) $\int (٢س + ٥)^{٣}\, ءس = \frac{(٢س + ٥)^{٤}}{٢ \times ٤} + ث = \frac{١}{} (٢س + ٥)^{٤} + ث$

(٢) $\int \sqrt{٢س - ٥}\, ءس = \int (٢س - ٥)^{\frac{١}{}}\, ءس = \frac{(٢س - ٥)^{\frac{٣}{٢}}}{٢ \times \frac{٣}{٢}} + ث$

$= \frac{١}{} (٢س - ٥) \sqrt{٢س - ٥} + ث$

(٣) $\int س^{١٠} \left(\frac{٧}{س} + \frac{١}{س^{٢}}\right)^{٥} ءس = \int \left[س^{٢} \left(\frac{٧}{س} + \frac{١}{س^{٢}}\right) \right]^{٥} ءس$

$= \int (٧س + ١)^{٥}\, ءس = \frac{١}{\cdot} (٧س + ١)^{٦} + ث$

(٤) $\int (س + ١) \sqrt{٣س + ٥}\, ءس$

$= \frac{١}{} \int (٣س + ٣)(٣س + ٥)^{\frac{١}{}}\, ءس$ بالضرب فى $٣ \times \frac{١}{}$

$= \frac{١}{} \int (٣س + ٥ - ٢)(٣س + ٥)^{\frac{١}{}}\, ءس$ بإضافة ± ٥

$= \frac{١}{} \int (٣س + ٥)^{\frac{٣}{}}\, ءس - \frac{٢}{} \int (٣س + ٥)^{\frac{١}{}}\, ءس$

$= \frac{٢}{\cdot} (٣س + ٥)^{\frac{٥}{}} - \frac{٤}{\cdot\cdot} (٣س + ٥)^{\frac{٣}{}} + ث$ (قارن طريقة الحل مع طريقة التكامل بالتعويض التالية)

تدريب :أوجد التكاملات التالية :

(١) $\int (\text{٣س} + ٧)^{٥} \, \text{ءس} =$

(٢) $\int (\text{ن}^{-٥} \; [\text{illegible}]) \, \text{ءس} =$

(٣) **أوجد الدوال الأصلية للدالة** $\text{د(س)} = \sqrt[٣]{\text{س}^{-٢}}$ [illegible]

تمارين / أوجد التكاملات الآتية:

١	$\int \text{٣ءس}$	٢	$\int \text{٨س ءس}$
٣	$\int (\text{٩ س}^{٢} + \text{٤ س}^{٣} - ٧) \, \text{ءس}$	٥	$\int \frac{٦}{[\text{illegible}]} \, \text{ءس}$
٥	$\int \sqrt[٥]{\text{س}^{٣}} \, \text{ءس}$	٦	$\int (\text{س} + ٥) \, \text{ءس}$
٧	$\int (\text{٥س}^{٤} - \text{٧س}^{٣} + \text{٣س}^{٢}) \, \text{ءس}$	٨	$\int \text{س} (\text{س}^{٢} + ٨) \, \text{ءس}$
٩	$\int \text{٣س}^{٢} (\text{س}^{٣} - \sqrt{\text{س}} + \frac{٤}{[\text{illegible}]}) \, \text{ءس}$	١٠	$\int (\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}} \, (\text{٣س}^{٢} + \sqrt{\text{س}^{٣}} - \frac{٧}{[\text{illegible}]})) \, \text{ءس}$
١١	$\int (\text{س}^{٢} - ٢)^{٢} \, \text{ءس}$	١٢	$\int (\text{٣س} + ٧)^{٥} \, \text{ءس}$
١٣	$\int (\text{ن}^{-٥} \; [\text{illegible}]) \, \text{ءس}$	١٤	$\int (\frac{\text{ن} +}{[\text{illegible}]} \; \frac{\text{ه}}{[\text{illegible}]}) \, \text{ءس}$

١٥	$\int (س^{٢} + ٣)(٥س - ٤)\, ءس$	١٦	$\int \frac{س^{٢} + ٦س + ٩}{س + ...}\, ءس$
١٧	$\int \frac{س^{٢} + ٥س - ١٤}{س}\, ءس$	١٨	$\int \sqrt{س}\,(س^{٢} + ٤س - ١)\, ءس$
١٩	أوجد الدوال الأصلية للدالة $د(س) = \sqrt[٣]{س-٢}$		

التكامل بالتعويض

بالتعويض التكامل — *Integration by Substitntion*

من أهم طرق التكامل لإيجاد تكامل حاصل ضرب دالتين

الحالة الاولى : (تكامل دالة مرفوعة لقوة × مشتقتها)

$$\int د(ر(س))\, ر'(س)\, ءس = \int [د(س)]^{ن} \times د'(س)\, ءس = \frac{[د(س)]^{ن+١}}{ن+١} + ث$$

مثال ٢ ص ٩٩ : أوجد : Ⓐ $\int س^{٣}(٢س^{٤} - ٧)^{٥}\, ءس$ Ⓑ $\int \frac{س+٤}{(س^{٢}+٨س)^{٣}}$

$$= \frac{١}{٨}\int ٨س^{٣}(٢س^{٤} - ٧)^{٥}\, ءس = \frac{١}{٨\times٦}(٢س^{٤} - ٧)^{٦} + ث = \frac{١}{٤٨}(٢س^{٤} - ٧)^{٦} + ث$$

Ⓑ $$\int \frac{س+٤}{(س^{٢}+٨س)^{٣}}\, ءس = \frac{١}{٢}\int \frac{(٢س+٨)}{(س^{٢}+٨س)^{٣}}\, ءس = \frac{-١}{٤(س^{٢}+٨س)^{٢}} + ث$$

حاول أن تحل ٢ ص ٩٩ :

أوجد : (أ) $\int ٣\,س\,(س^{٢} - ٧)^{٤}\,ءس$ (ب) $\int \frac{س^{٢}}{(س^{٣} - ٤س)^{٥}}\,ءس$

(أ) $\int ٣\,س\,(س^{٢} - ٧)^{٤}\,ءس = \frac{١}{٢} \times ٣ \times ٢ \int س\,(س^{٢} - ٧)^{٤}\,ءس = \frac{٣}{١٠}\,(س^{٢} - ٧)^{٥} + ث$

(ب) $\int \frac{س^{٢}}{(س^{٣} - ٤س)^{٥}}\,ءس = \int \frac{١}{٣} \times ٣س^{٢}\,(س^{٣} - ٤)^{-٥}\,ءس = \frac{١}{٣} \times \frac{١}{-٤}\,(س^{٣} - ٤)^{-٤} + ث =$

$= \frac{-١}{١٢\,(س^{٣} - ٤)^{٤}} + ث$

تدريب : أوجد التكاملات التالية :

(١) $\int \sqrt[٣]{س^{٤} - ٢\,س^{٣} + ٤}\;(٢س^{٣} - ٣س^{٢})\,ءس$

(٢) $\int (س^{٣} + س - ٥)^{٩}\,(٣س^{٢} + ١)\,ءس$

الحالة الثانية : (استخدام تعويض مناسب لاحدى الدالتين) :

مثال ٣ ص ٩٩ : **أوجد :** (أ) $\int س\,(س + ٤)^{٧}\,ءس$ (ب) $\int (س^{٢} + ٥)\sqrt{س - ١}\,ءس$

(أ) $\int س\,(س + ٤)^{٧}\,ءس$ **نلاحظ ان الدالتين المضروبتين من نفس الدرجة (الاولى)**

هنا نفرض $(س + ٤) = ص$ ومنها $س = ص - ٤$ $ءس = ءص$ **بالتعويض فى التكامل**

$\int س\,(س + ٤)^{٧}\,ءس = \int (ص - ٤)\,(ص)^{٧}\,ءص = \int (ص^{٨} - ٤\,ص^{٧})\,ءص =$

$= \frac{١}{٩}\,ص^{٩} - ٤ \times \frac{١}{٨}\,ص^{٨} + ث = \frac{١}{٩}\,(س + ٤)^{٩} - \frac{١}{٢}\,(س + ٤)^{٨} + ث = \frac{١}{١٨}\,(س + ٤)^{٨}\,(٢س - ١) + ث$

(ب) $\int (س^{٢} + ٥)\sqrt{س - ١}\,ءس$

نلاحظ ان الدالتين المضروبتين مختلفتان فى الدرجة (الثانية × الجذر التربيعى للاولى)

هنا نفرض $(س - ١) = ص$ **ومنها** $س = ص + ١$ **ومنها** $س^{٢} + ٥ = (ص + ١)^{٢} + ٥$

$ءس = ءص$ **بالتعويض فى التكامل**

$\int \left[(ص + ١)^{٢} + ٥\right] \sqrt{ص}\,ءص = \int \left[ص^{٢ + \frac{١}{٢}} + ٢\,ص^{١ + \frac{١}{٢}} + ٥\,ص^{\frac{١}{٢}}\right] ءص =$

$$= \frac{٢}{٧}ص^{\frac{٧}{٢}} + ٢\times\frac{٢}{٥}ص^{\frac{٥}{٢}} + ٥\times\frac{٢}{٣}ص^{\frac{٣}{٢}} + ث = \frac{٢}{٧}(س-١)^{\frac{٧}{٢}} + ٢\times\frac{٢}{٥}(س-١)^{\frac{٥}{٢}} + ٥\times\frac{٢}{٣}(س-١)^{\frac{٣}{٢}} + ث =$$

$$= \frac{٢}{٣٥}\sqrt{(س-١)^{٤}}\,(٥س^{٢}+٤س+٦١)+ث$$

حاول أن تحل ٣ صـ ١٠٠ : أوجد : (أ) $\int س\,(٢س-٣)^{٤}\,ءس$ (ب) $\int س^{٢}\sqrt[٣]{٣س-١}\,ءس$

(أ) $\int س\,(٢س-٣)^{٤}\,ءس$

نلاحظ ان الدالتين المضروبتين من نفس الدرجة (الاولى)

هنا نفرض $(٢س-٣) = ص$ **ومنها** $س = \frac{١}{٢}(ص+٣)$ $\quad ءس = \frac{١}{٢}\,ءص$

بالتعويض فى التكامل $\int س\,(٢س-٣)^{٤}\,ءس$

$$= \int \frac{١}{٢}(ص+٣)\,(ص)^{٤}\times\frac{١}{٢}\,ءص = = \frac{١}{\ }\int(ص^{٥}+٣ص^{٤})\,ءص =$$

$$= \frac{١}{\ }\cdot ص^{٦} + \frac{٣}{\ }\cdot ص^{٥} + ث = \frac{١}{\ }\cdot(٢س-٣)^{٦} + \frac{٣}{\ }\cdot(٢س-٣)^{٥} + ث$$

$$= \frac{١}{\ }\cdot\cdot(٢س-٣)^{٥}(١٠س+٣) + ث$$

(ب) $\int س^{٢}\sqrt[٣]{٣س-١}\,ءس$ **نلاحظ ان الدالتين المضروبتين مختلفتان فى الدرجة (الدرجة الثانية × الجذر التكعيبى للاولى**

هنا نفرض $(٣س-١) = ص \Leftarrow س = \frac{١}{٣}(ص+١) \Leftarrow س^{٢} = \frac{١}{\ }(ص+١)^{٢}$

$ءس = \frac{١}{٣}\,ءص$ **بالتعويض فى التكامل** $\int\left[\frac{١}{\ }(ص+١)^{٢}\right]\sqrt[٣]{ص}\,ءص = \frac{١}{\ }\int$

$$(ص^{٢+\frac{١}{٣}}+ص^{١+\frac{١}{٣}}+ص^{\frac{١}{٣}})\,ءص = \frac{١}{\ }\times\left(\frac{٣}{١٠}ص^{\frac{١٠}{٣}}+\frac{٢\times٣}{٧}ص^{\frac{٧}{٣}}+\frac{٣}{٤}ص^{\frac{٤}{٣}}\right)+ث = \frac{١}{\ }\times$$

$$\left(\frac{١}{٣٠}(٣س-١)^{\frac{١٠}{٣}}+\frac{٦}{٦٣}(٣س-١)^{\frac{٧}{٣}}+\frac{١}{١٢}(٣س-١)^{\frac{٤}{٣}}\right)+ث$$

حالات خاصة : (دوال جذرية – أسية – لوغاريتمية)

مثال ٤ صـ ١٠٠ : أوجد : (أ) $\int\sqrt{\frac{١+\sqrt{س}}{س}}\,ءس$ (ب) $\int ٦س\,هـ^{س^{٢}}\,ءس$

(أ) $\int\sqrt{\frac{١+\sqrt{س}}{س}}\,ءس =$

بفرض $١+\sqrt{س} = ص \Leftarrow س = (ص-١)^{٢} \Leftarrow ءس = ٢(ص-١)\,ءص$

$$= \int \sqrt{\frac{\text{ص}}{(\text{ص}-1)^{2}}} \times 2(\text{ص}-1)\, \text{ءص} = \int \frac{\sqrt{\text{ص}}}{(\text{ص}-1)} \times 2(\text{ص}-1)\, \text{ءص} = 2\int \text{ص}^{\frac{1}{2}}\, \text{ءص} = \frac{2\times 2}{3}\text{ص}^{\frac{3}{2}} + \text{ث} = \frac{4}{3}\sqrt{(1+\sqrt{\text{س}})^{3}} + \text{ث}$$

ب) $\int 6\text{س}\, \text{هـ}^{\text{س}^{2}}\, \text{ءس} = 3\int 2\text{س}\, \text{هـ}^{\text{س}^{2}}\, \text{ءس} = 3\, \text{هـ}^{\text{س}^{2}} + \text{ث}$

حاول أن تحل ٤ صـ ١٠١ : أ) $\int \frac{\text{س}}{\sqrt{1-3\text{س}^{2}}}\, \text{ءس}$ ب) $\int (3-\text{س})\, \text{هـ}^{6\text{س}-\text{س}^{2}}\, \text{ءس}$

أ) بفرض $\text{ص} = 1-3\text{س}^{2}$ $\Leftarrow$ $\text{ءص} = -3\times 2\, \text{س}\, \text{ءس}$

$$\int \frac{\text{س}}{\sqrt{1-3\text{س}^{2}}}\, \text{ءس} = \frac{-1}{6}\int \frac{1}{\sqrt{1-3\text{س}^{2}}} \times -3\times 2\text{س}\, \text{ءس} = \frac{-1}{6}\int (\sqrt{\text{ص}})^{-1} \times \text{ءص} = \frac{-1}{3}\sqrt{\text{ص}} + \text{ث} = \frac{-1}{3}\sqrt{1-3\text{س}^{2}} + \text{ث}$$

ب) $\int (3-\text{س})\, \text{هـ}^{6\text{س}-\text{س}^{2}}\, \text{ءس} = \frac{1}{2}\int (6-2\text{س})\, \text{هـ}^{6\text{س}-\text{س}^{2}}\, \text{ءس} = \frac{1}{2}\, \text{هـ}^{6\text{س}-\text{س}^{2}} + \text{ث}$

مثال ٥ صـ ١٠١ أوجد : أ) $\int \frac{5\text{س}}{3\text{س}^{2}-1}\, \text{ءس}$ ب) $\int \frac{\sqrt{\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}}}{\text{س}}\, \text{ءس}$

أ) $\int \frac{5\text{س}}{3\text{س}^{2}-1}\, \text{ءس} =$

$$\int \frac{5}{6} \times \frac{6\,\text{س}}{3\,\text{س}^{2}-1}\, \text{ءس} = \frac{5}{6}\int \frac{\text{د}'(\text{س})}{\text{د}(\text{س})}\, \text{ءس} = \frac{5}{6} \times \text{لـو}_{\text{هـ}} |\text{د}(\text{س})| + \text{ث} = \frac{5}{6} \times \text{لـو}_{\text{هـ}} |3\text{س}^{2}-1| + \text{ث} =$$

ب) $$\int \frac{\sqrt{\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}}}{\text{س}}\, \text{ءس} = \int \frac{1}{\text{س}}\sqrt{\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}}\, \text{ءس} = \int \frac{1}{\text{س}}(\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س})^{\frac{1}{2}}\, \text{ءس} = \int \text{د}'(\text{س})(\text{د}(\text{س}))^{\frac{1}{2}}\, \text{ءس}$$

$$= \frac{2}{3}(\text{د}(\text{س}))^{\frac{3}{2}} + \text{ث} = \frac{2}{3}(\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س})^{\frac{3}{2}} + \text{ث} = \frac{2}{3}(\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س})\sqrt{\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}} + \text{ث} \quad ، \text{س} > 0$$

حاول أن تحل ٥ صـ ١٠١

أوجد : أ) $\int \frac{5\text{س}}{3\text{س}^{2}-1}\, \text{ءس}$ ب) $\int \frac{1}{\text{س}(\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س})^{2}}\, \text{ءس}$

أ) $\int \frac{\text{هـ}^{2\text{س}}}{\text{هـ}^{2\text{س}}+3}\, \text{ءس} = \int \text{لـو}_{\text{هـ}}|\text{هـ}^{2\text{س}}| + \text{ث} = 2\text{س} + \text{ث}$

ب) $\int \frac{1}{\text{س}(\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س})^{2}}\, \text{ءس} = \int \frac{1}{\text{س}}(\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س})^{-2}\, \text{ءس} = \frac{-1}{\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}} + \text{ث}$

تفكير ناقد: باستخدام التكامل بالتعويض أثبت صحة قواعد التكامل التالية:

① $\int \frac{\text{د}'(\text{س})}{\text{د}(\text{س})}\,\text{ءس} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{د}(\text{س})| + \text{ث}$ ، $\text{د}(\text{س}) \neq 0$

② $\int \text{د}'(\text{س})(\text{د}(\text{س}))^{\text{ن}}\,\text{ءس} = \frac{1}{\text{ن}+1}(\text{د}(\text{س}))^{\text{ن}+1} + \text{ث}$ ، $\text{ن} \neq -1$

تدريب محلول : أوجد كلاً من التكاملات الآتية :

(١) $\int \text{س}\sqrt{\text{س}+1}\,\text{ءس}$ (٢) $\int \text{س}^2(\text{س}-1)^4\,\text{ءس}$

(٣) $\int \text{س}^3(\text{س}^2-2)^5\,\text{ءس}$ (٤) $\int 3\text{س}^2\sqrt{\text{س}^3+1}\,\text{ءس}$

(١) $\int \text{س}\sqrt{\text{س}+1}\,\text{ءس}$

الحل

بفرض $\text{ع} = \text{س}+1$ ∴ $\text{س} = \text{ع}-1$ ، $\text{ءس} = \text{ءع}$

∴ $\int \text{س}\sqrt{\text{س}+1}\,\text{ءس} = \int(\text{ع}-1)\,\text{ع}^{\frac{1}{2}}\,\text{ءع} = \int(\text{ع}^{\frac{3}{2}} - \text{ع}^{\frac{1}{2}})\,\text{ءع}$

$= \frac{2}{5}\text{ع}^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}\text{ع}^{\frac{3}{2}} + \text{ث} = \frac{2}{5}(\text{س}+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(\text{س}+1)^{\frac{3}{2}} + \text{ث} = \frac{2}{15}(\text{س}+1)^{\frac{3}{2}}(3\text{س}-2) + \text{ث}$

---

(٢) $\int \text{س}^2(\text{س}-1)^4\,\text{ءس}$

الحل

بفرض $\text{ع} = \text{س}-1$ ∴ $\text{س} = \text{ع}+1$ ، $\text{ءس} = \text{ءع}$

∴ $\int \text{س}^2(\text{س}-1)^4\,\text{ءس} = \int \text{ع}^4(\text{ع}+1)^2\,\text{ءع} = \int(\text{ع}^6 + 2\text{ع}^5 + \text{ع}^4)\,\text{ءع}$

$= \frac{1}{7}\text{ع}^7 + \frac{1}{3}\text{ع}^6 + \frac{1}{5}\text{ع}^5 + \text{ث} = \frac{1}{7}(\text{س}-1)^7 + \frac{1}{3}(\text{س}-1)^6 + \frac{1}{5}(\text{س}-1)^5 + \text{ث}$

---

(٣) $\int \text{س}^3(\text{س}^2-2)^5\,\text{ءس}$ **بفرض** $\text{ع} = \text{س}^2-2$ ∴ $\text{س}^2 = \text{ع}+2$ ، $2\text{س}\,\text{ءس} = \text{ءع}$

∴ $\frac{1}{2}\int \text{س}^2(\text{س}^2-2)^5\,2\text{س}\,\text{ءس} = \frac{1}{2}\int(\text{ع}+2)\,\text{ع}^5\,\text{ءع} = \frac{1}{2}\int(\text{ع}^6 + 2\text{ع}^5)\,\text{ءع}$

$= \frac{1}{14}\text{ع}^7 + \frac{1}{6}\text{ع}^6 + \text{ث} = \frac{1}{42}\text{ع}^6(3\text{ع}+7) + \text{ث} =$ اكمل الحل ....

---

(٤) $\int 3\text{س}^2\sqrt{\text{س}^3+1}\,\text{ءس} = \int(\text{س}^3+1)^{\frac{1}{2}} \times 3\text{س}^2\,\text{ءس} = \frac{2}{3}(\text{س}^3+1)^{\frac{3}{2}} + \text{ث}$